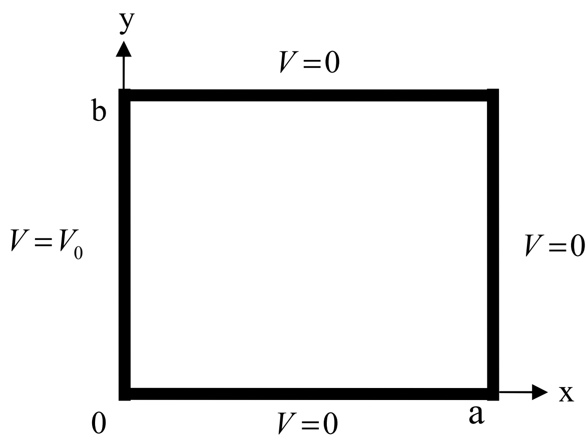
Boundary-Value Problems 邊界值問題

電磁學問題相當多樣性，其中包括相當複雜的邊界值問題(Boundary-Value Problems). 我們考慮一個有界之二維邊界值問題－矩形，並以解析與數值兩種解法去解這問題，其結構如Figure(1)所示



Figure(1)-二維邊界問題示意圖

解析解法:

由 Laplace equation 得電位$V(x,y)$為

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V(x,y)=0 \tag{4-1}$$

引用分離變數法(The method of separation of variables)

$$V(x,y)=X(x)Y(y) \tag{4-2}$$

將(4-2)式代入(4-1)得

$$\frac{d^2X(x)}{dx}Y(y)+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy}=0 \tag{4-3}$$

將(4-3)式同除$X(x)Y(y)$得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy}=0 \tag{4-4}$$

令

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx}=k^2\ ;\ \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy}=-k^2 \text{, k 為常數} \tag{4-5}$$

上式之通解

$$X(x)=A\sinh kx+B\sinh kx\ ; Y(y)=C\sinh ky+D\sinh ky \tag{4-6}$$

配合邊界條件: $\begin{cases} V(0,y)=V_0, V(a,y)=0 \\ V(x,0)=0, V(x,b)=0 \end{cases}$ 並利用 Fourier Series 公式解得

$$V(x,y)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{-4V_0}{n\pi\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sinh\frac{n\pi(x-a)}{b}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{4-7}$$

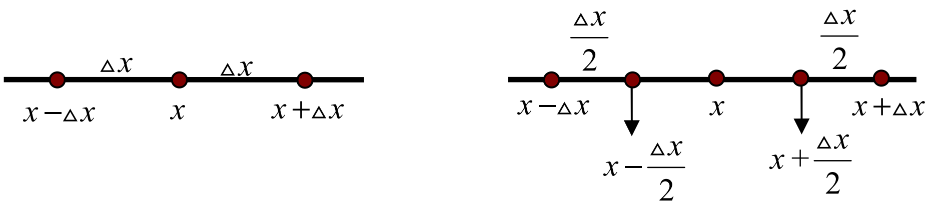
為了方便與數值解法比較，我們分別設定幾個點去求出其電位值將其上述之(4-7)寫簡單的 Matlab code 詳細程式碼如下:

```
clear all
clc
a=2; % set length of a
b=2; % set length of b
v0=100; % set potential
v=0.0;
x=0.1;
y=1;
for m = 0:1:100
    n = 2*m+1;                    % formula 4-7
    v=v+4*v0.*sinh(n*pi.*(a-x)/b).*sin(y*n*pi/b)./(pi*n*sinh(n*pi*a/b));
end
v
```

其所得到的解為 v = 89.9657 (4-8)

數值解法(有限差分法):

由有限差分法理論之中央差分法得知 x 之一階導數 如 Figure(3) 所示



Figure(3)- First Derivative - Central difference

其中

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{4-9}$$

$$f'(x)\simeq\frac{f(x+\Delta x/2)-f(x-\Delta x/2)}{\Delta x} \tag{4-10}$$

同理，二階導數也可應用(4-9)之結果求出

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{f'(x+\Delta x/2)-f'(x-\Delta x/2)}{\Delta x} \\ &=\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &=\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{4-11}$$

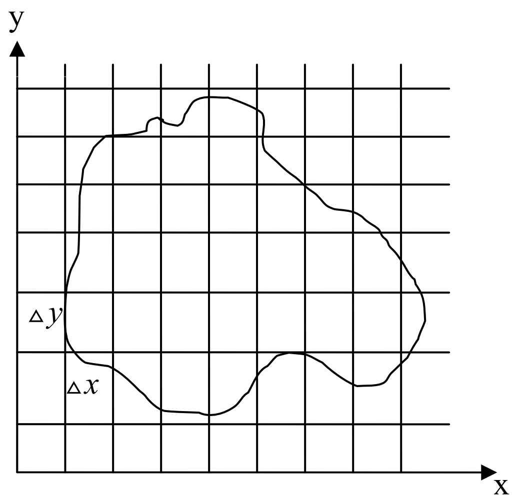
由 Laplace equation 得電位:

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{4-12}$$

令

$$\begin{aligned} &x=xi=i\Delta x \qquad (i=1,2...) \\ &y=yj=j\Delta y \qquad (j=1,2...) \end{aligned} \tag{4-13}$$

由(4-12)將 xy 分割平面，其示意圖如 Figure(4) 所示



Figure(4)-xy 分割平面示意圖

變數 y 固定

$$V''(x,y)=\frac{V(x+\Delta x,y)-2V(x,y)+V(x-\Delta x,y)}{\Delta x^2} \tag{4-14}$$

變數 x 固定

$$V''(x,y)=\frac{V(x,y+\Delta y)-2V(x,y)+V(x,y-\Delta y)}{\Delta y^2} \tag{4-15}$$

經由(4-6)與(4-7)式改寫成(4-8)式

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{V(x+\Delta x,y)-2V(x,y)+V(x-\Delta x,y)}{\Delta x^2}\\ &+\frac{V(x,y+\Delta y)-2V(x,y)+V(x,y-\Delta y)}{\Delta y^2}=0\end{aligned} \tag{4-16}$$

如果Δx=Δy=Δ ，則(4-8)式可改寫成(4-9)式

$$\begin{aligned}&V(x+\Delta x,y)-2V(x,y)+V(x-\Delta x,y)\\ &+V(x,y+\Delta y)-2V(x,y)+V(x,y-\Delta y)=4V(x,y)\end{aligned} \tag{4-17}$$

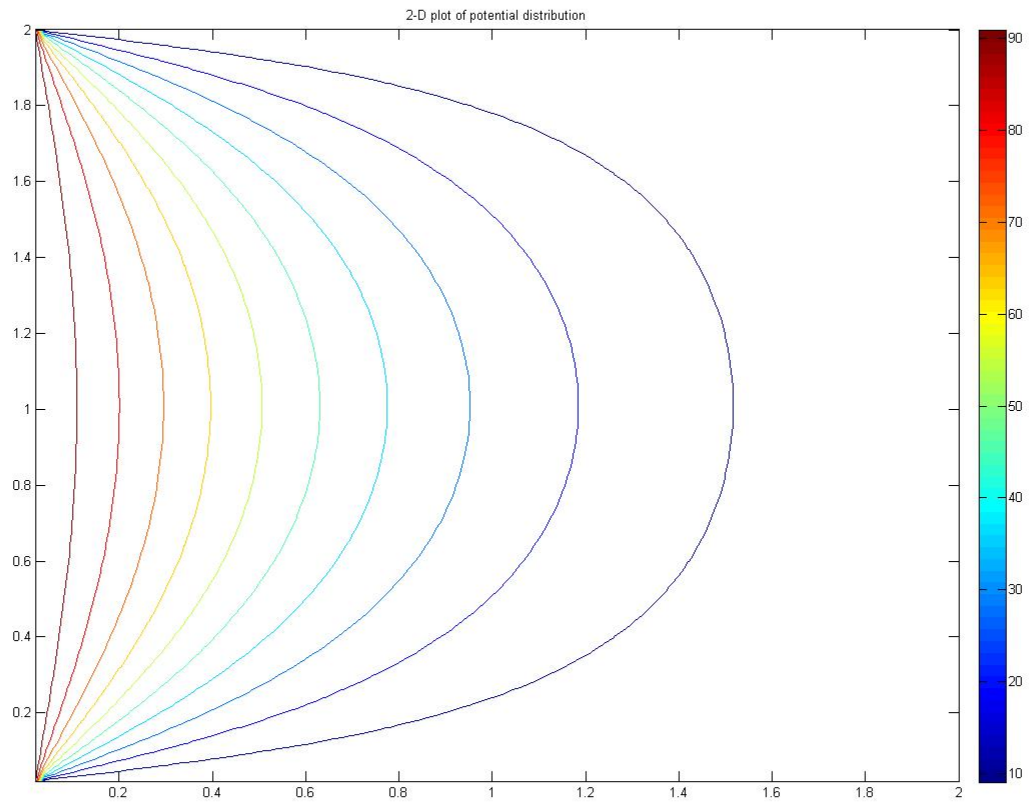
最後整理得(4-10)式

$$\therefore V(x,y)=\frac{1}{4}[V(x+\Delta x,y)+V(x-\Delta x,y)+V(x,y+\Delta y)+V(x,y-\Delta y)] \tag{4-18}$$

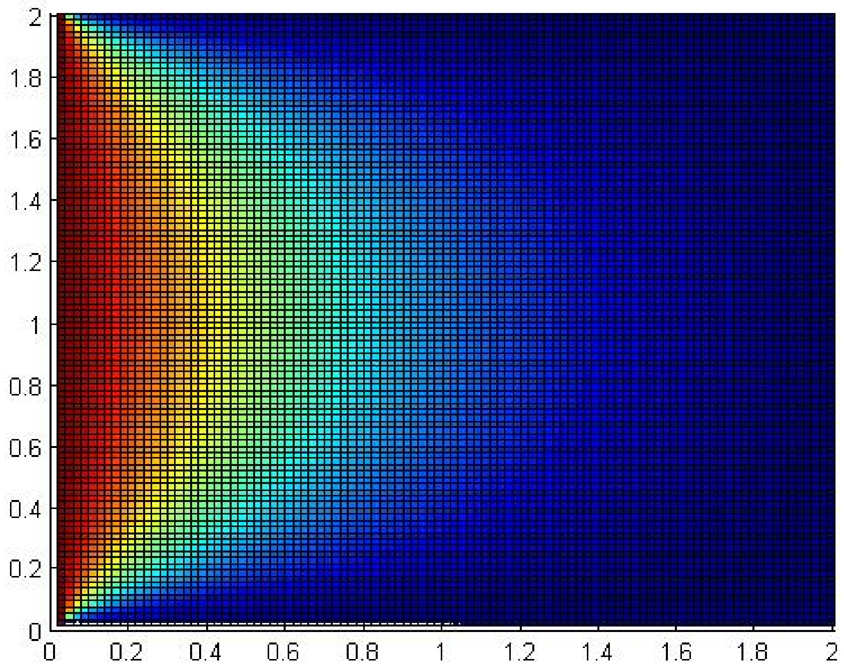
將上述之推導寫成 MATLAB，並同樣代入點(0.1 , 1)求出 V 值，詳細程式碼如下:

```
clear all
clc
a=2; % set length of a
b=2; % set length of b
v0=100; % set potential
h=0.02; % intevral of nodes
niter=10000; % number of iterations
nx=a/h; ny=b/h;
v(1:h:nx,1:h:ny)=0.0; % initialization of all nodes to zero.

v(1,1:ny)=v0;

for ii=1:niter

v(2:nx-1,2:ny-1)=0.25*(v(3:nx,2:ny-1)+v(1:nx-2,2:ny-1)+v(2:nx-1,3:ny)+v(2:nx-1,1
:ny-2));
end
v=v';
figure(1)
surf(v);
set(gca,'Xticklabel',[0:0.2:a],'Yticklabel',[0:0.2:b])
figure(2)
contour(v, 10);
set(gca,'Xticklabel',[0.2:0.2:a],'Yticklabel',[0.2:0.2:b])
colorbar;
title('2-D plot of potential distribution of the example 4-7, p181');
v(1+1/2.*nx,1+0.2/2.*ny)
```

執行結果如 Figure(5) 與 Figure(6)所示。



Figure(5)-Contour



Figure(6)-Surf

其點(0.1, 1)代入後的值為

v = 89.8207

與(4-8)中的 89.9657 有 0.145 的誤差!

為了保險起見我們再代入另外兩個座標點去做個解析解與數值解之比較，詳細結果如下:

座標值: (0.04, 0.2)

解析解: v = 87.1662

數值解: v = 87.2124

座標值: (0.02, 1.2)

解析解: v = 97.8400

數值解: v = 97.8826

此兩點之解析解與數值解之誤差分別為 0.0962 及 0.0426 。均在可接受的誤差範圍內。

結論：

從前面的推導中，我們不難發現這邊界問題推導的困難度，需要 Fourier Series 公式去解。但一但了解數值方法便就變得相當的容易，當然數值解法與傳統解法有那些許的誤差存在，因為算是用趨近的手法，但卻將複雜的公式計算，變得容易許多，更重要的是當遇到奇形怪狀的圖形時也可以運用數值的方法解決問題，這是傳統解法所難以達成的。所以數值法不僅具有傳統方法所沒有的快速與便利性，還有著傳統解法所沒有的廣度!